华南理工大学2017级新生入学测试

学院 专业 姓名 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 学号

( 密 封 线 内 不 答 题 )

…………………………………密………………………………………………………封……………………………………………线……………………………………

**数 学**

注意事项：1、本试卷共五大题，满分100分；时间120分钟

2、所有答案直接写在试卷上。

3、答卷前请将密封线内各项填写清楚。

4、请涂黑你要选报的班级前的方框

□材料 □计算机 □土木 □软件

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
| 得分 |  |  |  |  |  |  |
| 评卷人 |  |  |  |  |  |

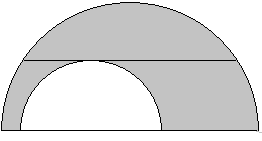
一、填空题（每小题5分，共50分）填写正确答案。

1）已知，则代数式的值等于 。（答案：25）

详解 结合，可得

，

即

2）如右图所示，小半圆的直径落在大半圆的

直径上，大半圆的弦平行于且与小













半圆相切，弦，则图中阴影部分的面

积为 平方厘米。(答案：)

详解 

3）是一个三位数的正整数，其百、十、个位上的数字分别为，则以为边刚好构成等腰而非等边三角形的概率是 。

（答案：）

详解 百位上不能是0，否则不是三位数，即有九种可能，其余有十种可能，999-99=900个数。

选定有刚好构成等腰而非等边三角形的52个（扣除两边之和不能大于第三边，两边之差不能少于第三边不能构成三角形的），

见列表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 1 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 |
| 1 | 5 | 5 | 2 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 |
| 1 | 6 | 6 | 2 | 6 | 6 | 3 | 6 | 6 |
| 1 | 7 | 7 | 2 | 7 | 7 | 3 | 7 | 7 |
| 1 | 8 | 8 | 2 | 8 | 8 | 3 | 8 | 8 |
| 1 | 9 | 9 | 2 | 9 | 9 | 3 | 9 | 9 |
| 4 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 2 | 5 | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 6 | 4 | 4 |
| 4 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| 4 | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 |
| 4 | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 | 6 | 8 | 8 |
| 4 | 9 | 9 | 5 | 9 | 9 | 6 | 9 | 9 |
| 7 | 1 | 1 | 8 | 1 | 1 | 9 | 1 | 1 |
| 7 | 2 | 2 | 8 | 2 | 2 | 9 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 8 | 3 | 3 | 9 | 3 | 3 |
| 7 | 4 | 4 | 8 | 4 | 4 | 9 | 4 | 4 |
| 7 | 6 | 6 | 8 | 5 | 5 | 9 | 5 | 5 |
| 7 | 5 | 5 | 8 | 6 | 6 | 9 | 6 | 6 |
| 7 | 6 | 6 | 8 | 7 | 7 | 9 | 7 | 7 |
| 7 | 9 | 9 | 8 | 9 | 9 | 9 | 8 | 8 |

选定有刚好构成等腰而非等边三角形的52个（扣除两边之和不能大于第三边，两边之差不能少于第三边不能构成三角形的），

见列表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 5 | 2 | 2 | 5 | 3 | 3 | 5 |
| 1 | 1 | 6 | 2 | 2 | 6 | 3 | 3 | 6 |
| 1 | 1 | 7 | 2 | 2 | 7 | 3 | 3 | 7 |
| 1 | 1 | 8 | 2 | 2 | 8 | 3 | 3 | 8 |
| 1 | 1 | 9 | 2 | 2 | 9 | 3 | 3 | 9 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 5 | 1 | 6 | 6 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 5 | 5 | 2 | 6 | 6 | 2 |
| 4 | 4 | 3 | 5 | 5 | 3 | 6 | 6 | 3 |
| 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 6 | 6 | 4 |
| 4 | 4 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| 4 | 4 | 7 | 5 | 5 | 7 | 6 | 6 | 7 |
| 4 | 4 | 8 | 5 | 5 | 8 | 6 | 6 | 8 |
| 4 | 4 | 9 | 5 | 5 | 9 | 6 | 6 | 9 |
| 7 | 7 | 1 | 8 | 8 | 1 | 9 | 9 | 1 |
| 7 | 7 | 2 | 8 | 8 | 2 | 9 | 9 | 2 |
| 7 | 7 | 3 | 8 | 8 | 3 | 9 | 9 | 3 |
| 7 | 7 | 4 | 8 | 8 | 4 | 9 | 9 | 4 |
| 7 | 7 | 6 | 8 | 8 | 5 | 9 | 9 | 5 |
| 7 | 7 | 5 | 8 | 8 | 6 | 9 | 9 | 6 |
| 7 | 7 | 6 | 8 | 8 | 7 | 9 | 9 | 7 |
| 7 | 7 | 9 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 8 |

为边刚好构成等腰而非等边三角形总计为个，则以为边刚好构成等腰而非等边三角形的概率.

4）函数的值域为 。

（答案：）

详解 由万能公式，，从而

，

由判别式，

由，可得

答案：。

5）直四棱柱两对角面所成的二面角为，两对角面的面积分别为

和，底面面积为，则此四棱柱的体积为 。

（答案：）

不记得定义，网上查参考资料

直四棱柱:侧棱垂直于底面的四棱柱叫做直四棱柱。直四棱柱的侧棱长与高相等;直四棱柱的侧面及经过不相邻的两条侧棱的截面都是矩形。​

直四棱柱: 侧棱垂直于底面的四棱柱叫做直四棱柱。

直四棱柱的侧棱长与高相等; 直四棱柱的侧面及经过不相邻的两条侧棱的截面都是矩形。

侧面积公式: S侧=C\*h(底面周长\*高)

全面积公式: S全=C\*h+2\*S底面(底面周长\*高+2个底面面积)体积公式:V=S\*h(底面面积\*高)

例 直棱柱底面菱形的面积是S，两对角面面积分别为p、q，求直棱柱的体积？

解：设[直棱柱](http://www.so.com/s?q=%E7%9B%B4%E6%A3%B1%E6%9F%B1&ie=utf-8&src=internal_wenda_recommend_text" \t "_blank)长为L,底面菱形的对角线长分别为a、b，体积为V,则   
S=ab/2 p=aL Q=bL 即2SPQ=(abL)^2 ，所以V=SL=abL/2=0.5√(2SPQ)（资料需纠错）

详解 依定义，有，，故得出，四棱柱的体积为。

6）在中，角的对边分别为，若成等比数列，且，则角的值为 。（答案：）

详解 成等比数列，则；由正弦定理，有。由，有，进而，

进而

，故有答案：.

7）已知一双曲线的中心在原点且一个焦点为，直线与其交于两点，的中点横坐标为，则双曲线的方程为 。

（答案：）

详解 由题设，实轴为x轴，可设且，

两点坐标可设为，由题设，，且

，

进而，结合，有，从而有答案：。

8）设都是正数且，则数的取值范围是 。 （答案）

详解 由题设， ，进而， ，进而可知答案必为的一个子集，

令， ，

则再令

即即，

由，（因导致矛盾舍去）；

由得（因导致矛盾舍去）；

即，进而，故有答案。

不等式解法：由题设， ，进而， ，进而由（平均值不等式）当时成立等式，从而

令，即有，







当，即时成立等式，

故有答案。

9）若是互质（另一种说法互素）的正整数，且以为边构成的三角形是直角三角形，则 。

（答案：8或24）

详解 由题设，不可能是斜边，只有或；即或；即或，；



依题意有答案：5+3=8或17+7=24。

10）方程组的正整数解的组数 。

（答案：1组）

详解 由题设，，要正整数解可设或或或，

或或或或，

或或或或；

进而或或或，

或或或或，

或或或或，

从而分析得仅有一组解。

**二、（本小题12分）**证明下列不等式

1）是任意实数，证明：；

2）当时 ，证明：

证明：1）因为

（反复用平均值不等式）

所以。

2）



（用上题不等式的推广）

因为当时，不能同时相等，所以当时有

（柯西不等式）

**三、（本小题12分）**如图，在棱长为2的正方体

























中，分别为，

的中点。

1）证明：平面平面；

2）在求一点使平面平面，

并计算出的值；

3）计算平面和平面的二面角。

解法一：1）因为平面，所以是平面与平面的二面角。又因为分别为，的中点，所以，，由勾股定理可得。

因此有平面平面；

2）过向作垂线垂足为，

因为所以垂直平面，由此可得。

又因为所以垂直平面，由此可得平面平面。

又因为，，所以，由于，从而，故；

3）由2）的讨论可得就是平面和平面的二面角，因为，由于，从而，故；由于垂直平面，由此可得 ，由勾股定理， 或。

方法二 建立坐标系用向量理论做（1、3简单,2不易）

**四、（本小题12分）**设函数是定义在上的偶函数，与的图像关于对称，且当时（为实数）。

1）求函数的表达式；

2）设，若的图像的最高点刚好落在直线上，求出的值。

解：1）向左平移2各单位，可得与关于轴对称，而时，，所以时有



由此可得时，，又因为函数是定义在上的偶函数，所以

2）由对称性只需考虑的情形，因为时，

并且当时等号成立，所以时，即时，函数在上的最大值为，若，则解得有，所以中不存在满足题设要求的值；

当时，设，则



这就说明函数在上是递增函数，函数在上的最大值为，由可得。

详解2：1）与关于对称，则，于是，而时，，即

，所以时有，，又因为函数是定义在上的偶函数，所以

2）由对称性只需考虑的情形，因为时，

，当为驻点，所以即要求时，函数与端点函数值比较得在上的最大值为，若，则解得有，所以中不存在满足题设要求的值；

当时，，则这就说明函数在上是递增函数，函数在上的最大值为，由可得。

**五、（本小题14分）**已知数列和满足条件



证明：存在数列的一个重排序数列使得



分析：看到这个题目，可以分析一下条件结论各意味着什么。从条件看，马上可以想到有。从结论看，是一个存在性的结论，要么构造法得到，如果构造不易，应该想想能否反证，也就是要从如果不存在数列的一个重排序数列使得意味着什么来思考。为了建立联系，需要具体化，要得出结论左边的表达式，只需要每行每列各取一个且仅一个出来再相加即可。为了表达有条理，不重不漏，可以选择对角线及其平行线选取方式，于是组，每组个数的表达就有了，证明也就出来了。

证明：用反证法证明，假设不存在这样的重排序数列（否定结论），则有







…… ……



以上式子相加可得，这是与已知矛盾（得出与已知前提推出的结论矛盾的结论），故结论得证。